

OLIMPIADA DE FÍSICA 2024.
FASE LOCAL DE GRANADA. 8 de marzo de 2024
Prueba resuelta.



Cuestiones

- 1) Una caja de embalaje de masa m es arrastrada sobre una superficie horizontal con velocidad constante, mediante una cuerda atada al frontal de la caja. La cuerda forma un ángulo θ con el suelo. El coeficiente de rozamiento es μ . ¿Para qué valor de θ la tensión en la cuerda es mínima?
- 2) Un ion monovalente de sodio (Na^+) y otro ion trivalente de aluminio (Al^{+3}) son ambos acelerados mediante una diferencia de potencial de 1000 V:
 - a) ¿Cuál de los dos adquirirá una mayor energía cinética? Calcula su valor.
 - b) ¿Cuál de ellos adquirirá mayor velocidad, si la masa del ion de aluminio es 2,45 veces mayor que la del ion de sodio? Razone su respuesta. Carga del electrón $e^- = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
- 3) Dos cargas eléctricas puntuales positivas e iguales de valor q están separadas una distancia $2a$. Por el punto medio del segmento que las une, se traza un plano perpendicular a dicho segmento. Una tercera carga puntual q' y masa m se encuentra realizando una trayectoria circular de radio R en ese plano, centrada en la línea que une ambas cargas q debido a la acción de la fuerza entre las dos cargas. Determine la velocidad de la trayectoria.
- 4) Una pequeña plataforma horizontal sufre un movimiento armónico simple en sentido vertical, de 3 cm de amplitud y cuya frecuencia aumenta progresivamente. Sobre ella reposa un pequeño objeto. ¿Para qué frecuencia dejará el objeto de estar en contacto con la plataforma?

PROBLEMA 1

Galileo observó por primera vez las lunas de Júpiter en 1610. Encontró que Io, el satélite más cercano a Júpiter poseía un periodo orbital de 1,8 días y el radio de su órbita era, aproximadamente, 3 veces el diámetro de Júpiter. Asimismo, encontró que el periodo orbital de Calisto (la cuarta luna más alejada de Júpiter) era de 16,7 días. Con esos datos, suponiendo órbitas circulares y usando que el radio de Júpiter es $7,15 \cdot 10^7 \text{ m}$, calcule:

- a) La masa de Júpiter.
- b) El radio de la órbita de Calisto.

PROBLEMA 2

Dos cables, largos y paralelos (Figura 1), de densidad 0,05 kg/m, por los que circulan corrientes de la misma intensidad, cuelgan por medio de unos hilos, de longitud 4 cm, de dos puntos comunes. El sistema está en equilibrio cuando los hilos forman un ángulo de 12° entre sí.

- a) ¿En que sentido circula la corriente en cada hilo, en el mismo sentido o en sentido contrario?
- b) ¿Cuál es la intensidad de corriente que está circulando por los cables?

Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (SI)}$, $g = 9,8 \text{ (SI)}$.

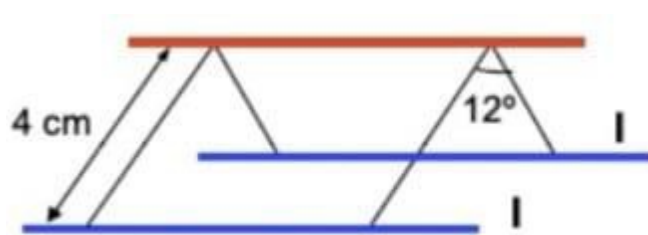


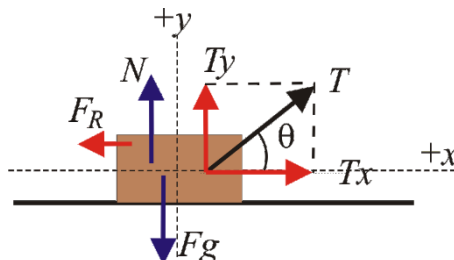
Figura 1

Cuestiones

1) Una caja de embalaje de masa m es arrastrada sobre una superficie horizontal con velocidad constante, mediante una cuerda atada al frontal de la caja. La cuerda forma un ángulo θ con el suelo. El coeficiente de rozamiento es μ . ¿Para qué valor de θ la tensión en la cuerda es mínima?

Las fuerzas que actúan sobre el bloque son las que se indican en el esquema: Fuerza gravitatoria ($F_g = m \cdot g$), normal (N), rozamiento ($F_R = \mu \cdot N$) y tensión (T , descompuesta en sus componentes T_x y T_y).

Según la primera ley de Newton, si se desplaza con velocidad constante, la resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre el bloque es cero.



$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_y = 0 \rightarrow N - mg + T \cdot \sin\theta = 0 \rightarrow N = mg - T \cdot \sin\theta \\ \Sigma F_x = 0 \rightarrow T \cdot \cos\theta - \mu \cdot N = 0 \rightarrow T \cdot (\cos\theta + \mu \cdot \sin\theta) = \mu mg \end{cases} \rightarrow T = \frac{\mu mg}{\cos\theta + \mu \cdot \sin\theta}$$

Dado que $\mu mg = cte$, la tensión T será mínima si $\cos\theta + \mu \cdot \sin\theta$ es máxima.

Calculamos un máximo para $f(\theta) = \cos\theta + \mu \cdot \sin\theta$

$$f'(\theta) = -\sin\theta + \mu \cdot \cos\theta = 0 \rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \mu \rightarrow \tan\theta = \mu \rightarrow \theta = \arctg(\mu)$$

Comprobamos que es un máximo $f''(\theta) = -\cos\theta - \mu \cdot \sin\theta < 0$, dado que $0 \leq \theta < 90^\circ$ Luego es máximo.

La tensión es mínima para $\theta = \arctg(\mu)$

2) Un ion monovalente de sodio (Na^+) y otro ion trivalente de aluminio (Al^{+3}) son ambos acelerados mediante una diferencia de potencial de 1000 V:

a) ¿Cuál de los dos adquirirá una mayor energía cinética? Calcula su valor.

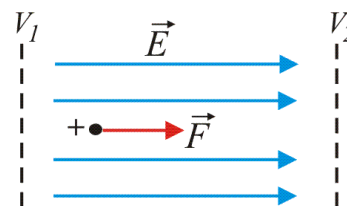
b) ¿Cuál de ellos adquirirá mayor velocidad, si la masa del ion de aluminio es 2,45 veces mayor que la del ion de sodio? Razone su respuesta. Carga del electrón $e^- = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

a) Los iones son partículas cargadas eléctricamente, que son aceleradas mediante campos eléctricos. Al ser la fuerza eléctrica conservativa, la energía mecánica del ion se mantiene constante

$$\Delta E_M = 0 \rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p \rightarrow \Delta E_c = -q \cdot \Delta V \rightarrow E_{c2} - E_{c1} = -q \cdot (V_2 - V_1)$$

Como inicialmente está en reposo $E_{c2} = -q \cdot (V_2 - V_1)$

Con una carga positiva, vemos en la figura que $V_1 > V_2$, por lo que $E_c = q \cdot \Delta V$
Siendo ΔV la diferencia de potencial en valor absoluto.



La carga del aluminio es tres veces la del sodio ($q_{Al} = 3 \cdot q_{Na}$), por lo que, siendo igual ΔV , la energía cinética que adquiere el ion de aluminio es el triple de la que adquiere el ion de sodio.

$$E_{cAl} = q_{Al} \cdot \Delta V = 3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1000 \text{ V} = 4,8 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_{cNa} = q_{Na} \cdot \Delta V = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1000 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

b) La velocidad la obtenemos a partir de la energía cinética: $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot |q| \cdot \Delta V}{m}}$

Vemos que adquirirá mayor velocidad aquella partícula con mayor relación carga/masa: $\frac{|q|}{m}$

$$\frac{|q|_{Al}}{m_{Al}} = \frac{3 \cdot |q|_{Na}}{2,45 \cdot m_{Na}} = 1,22 \cdot \frac{|q|_{Na}}{m_{Na}}$$

El ión de aluminio adquiere mayor velocidad, concretamente:

$$v_{Al} = \sqrt{1,22} \cdot v_{Na} = 1,105 \cdot v_{Na}$$

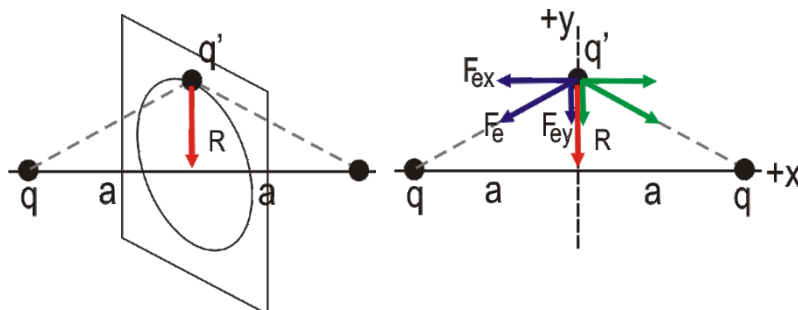
3) Dos cargas eléctricas puntuales positivas e iguales de valor q están separadas una distancia $2a$. Por el punto medio del segmento que las une, se traza un plano perpendicular a dicho segmento. Una tercera carga puntual q' y masa m se encuentra realizando una trayectoria circular de radio R en ese plano, centrada en la línea que une ambas cargas q debido a la acción de la fuerza entre las dos cargas. Determine la velocidad de la trayectoria.

La fuerza entre cargas eléctricas q y q' puntuales viene dada por la ley de Coulomb. $\vec{F}_e = \frac{Kqq'}{r^2} \vec{u}_r$

Aplicando el principio de superposición, la resultante será igual a la suma de ambas fuerzas.

Como vemos en el dibujo, la situación es simétrica. Las componentes "x" se anulan una con la otra, y la resultante (en rojo en el dibujo) sólo tendrá componente "y", que será el doble de una de ellas.

Para que la fuerza sea centrípeta, y de lugar a un movimiento circular, debe apuntar al centro de la circunferencia, por lo que q' debe ser negativa.



El módulo de la fuerza eléctrica que ejerce una de las cargas q : $F_e = \frac{K|qq'|}{r^2} = \frac{K|qq'|}{a^2+R^2}$

La componente "y", en módulo: $F_{ey} = F_e \cdot \cos\theta = \frac{K|qq'|}{a^2+R^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}} = \frac{K|qq'| \cdot R}{(a^2+R^2)^{3/2}}$

La resultante:
$$\begin{cases} (x) \Sigma F_x = 0 \\ (y) \Sigma F_y = 2 \cdot F_{ey1} = \frac{2 \cdot K|qq'| \cdot R}{(a^2+R^2)^{3/2}} \end{cases}$$

La resultante tiene un valor de $\frac{2 \cdot K|qq'| \cdot R}{(a^2+R^2)^{3/2}}$, apuntando al centro de la circunferencia.

El movimiento descrito por q' es un movimiento circular uniforme, por lo que la fuerza es centrípeta, produce aceleración normal.

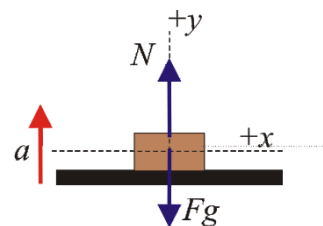
$$\Sigma F = m \cdot a_n \rightarrow \frac{2 \cdot K|qq'| \cdot R}{(a^2+R^2)^{3/2}} = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot K|qq'| \cdot R^2}{m \cdot (a^2+R^2)^{3/2}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot K|qq'| \cdot R^2}{m \cdot (a^2+R^2)^{3/2}}}$$

4) Una pequeña plataforma horizontal sufre un movimiento armónico simple en sentido vertical, de 3 cm de amplitud y cuya frecuencia aumenta progresivamente. Sobre ella reposa un pequeño objeto. ¿Para qué frecuencia dejará el objeto de estar en contacto con la plataforma?

Las fuerzas que actúan sobre el objeto son la gravitatoria ($F_g = m \cdot g$) y la normal (N).

Aplicando la segunda ley de Newton en el eje y:

$$N - F_g = m \cdot a \rightarrow N = m \cdot g + m \cdot a \rightarrow N = m \cdot (g+a)$$



(g : valor absoluto de la gravedad en la superficie terrestre, $g = 9,8 \text{ N/kg}$) (la cuestión debería dar este dato)

Mientras haya contacto, la normal tendrá un valor no nulo. Cuando esta se haga cero, el cuerpo dejará de tener contacto con la plataforma. Y esto ocurrirá cuando la aceleración de la plataforma sea igual a la gravedad, y en sentido negativo (hacia abajo).

(Es la misma situación del problema clásico del ascensor. Si este cae en caída libre ($a = -g$), el ocupante del ascensor pierde contacto con el suelo y se queda en "ingravedad aparente").

Pasamos ahora al movimiento de la plataforma, que es armónico simple.

La posición (altura de la plataforma) $y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$

La velocidad $v_y = \frac{dy}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$

La aceleración $a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$ Se cumple que $a_y = -\omega^2 \cdot y$

Buscamos el momento de aceleración máxima de la plataforma, pues será en ese instante cuando primero pierda contacto. Esto ocurre en su momento de máxima elongación positiva (altura máxima). Es en ese momento, además, cuando el sentido de la aceleración es el adecuado, hacia abajo.

(Otro clásico similar, en el parque de atracciones, nos montamos en la “barca vikinga”. Es al llegar a la altura máxima y comenzar a bajar cuando notamos que casi nos despegamos del suelo, una “casi ingravidez”)

El valor de la aceleración máxima (en valor absoluto) es $a_{max} = A \cdot \omega^2$, siendo A la amplitud, y ω la frecuencia angular.

Así, $a_{max} = A \cdot \omega^2 = g \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{A}}$ Y la frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A}} = 2,88 \text{ Hz}$

PROBLEMA 1

Galileo observó por primera vez las lunas de Júpiter en 1610. Encontró que Io, el satélite más cercano a Júpiter poseía un periodo orbital de 1,8 días y el radio de su órbita era, aproximadamente, 3 veces el diámetro de Júpiter. Asimismo, encontró que el periodo orbital de Calisto (la cuarta luna más alejada de Júpiter) era de 16,7 días. Con esos datos, suponiendo órbitas circulares y usando que el radio de Júpiter es $7,15 \cdot 10^7 \text{ m}$, calcule:

a) La masa de Júpiter.

b) El radio de la órbita de Calisto.

La tercera ley de Kepler establece la relación existente entre las órbitas de los cuerpos que describen órbitas en torno a un astro central debido a la atracción gravitatoria.

$\frac{T^2}{r^3} = cte$ siendo T el periodo de revolución y r el radio medio de la órbita.

Aplicando la ley de Gravitación universal de Newton, obtenemos el valor de la constante $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

Donde M es la masa del astro central (Júpiter en este caso)

a) Masa de Júpiter Usamos los datos de Io. $T = 1,8 \text{ días} = 1,555 \cdot 10^5 \text{ s}$; $r = 3 \cdot D_{Jup} = 6 \cdot R_{JUP} = 4,29 \cdot 10^8 \text{ m}$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \rightarrow M = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = 1,933 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

b) Radio de la órbita de Calisto: 1. Io, 2. Calisto $T_2 = 16,7 \text{ días} = 1,443 \cdot 10^6 \text{ s}$

3ª ley de Kepler: $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \rightarrow r_2^3 = \frac{r_1^3 \cdot T_2^2}{T_1^2} \rightarrow r_2 = \sqrt[3]{\frac{r_1^3 \cdot T_2^2}{T_1^2}} = 1,894 \cdot 10^9 \text{ m}$

PROBLEMA 2

Dos cables, largos y paralelos (Figura 1), de densidad 0,05 kg/m, por los que circulan corrientes de la misma intensidad, cuelgan por medio de unos hilos, de longitud 4 cm, de dos puntos comunes. El sistema está en equilibrio cuando los hilos forman un ángulo de 12° entre sí.

a) ¿En que sentido circula la corriente en cada hilo, en el mismo sentido o en sentido contrario?

b) ¿Cuál es la intensidad de corriente que está circulando por los cables?

Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (SI)}$, $g = 9,8 \text{ (SI)}$.

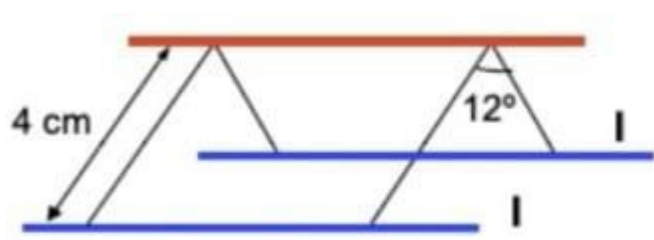


Figura 1

a) Entre dos conductores, paralelos e indefinidos, por lo que circulan corrientes I_1 e I_2 , existe una interacción magnética debido al campo que cada conductor crea a su alrededor (ley de Biot-Savart, $B = \frac{\mu \cdot I}{2\pi \cdot r}$), que su vez ejerce fuerza sobre el otro conductor (ley de Laplace, $\vec{F}_m = I \cdot \vec{L} \times \vec{B}$). El módulo de la fuerza por unidad de longitud que se ejerce entre los dos conductores viene dado por

$$f_m = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot r} = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi \cdot r}$$

Siendo r la distancia entre los conductores, e $I_1 = I_2 = I$.

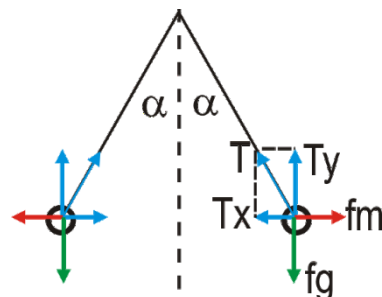
Esta fuerza es repulsiva (como en este caso) cuando las corrientes van en sentidos opuestos.

b) Para facilitar la comprensión, dibujamos un esquema visto de frente. Los dos cables van hacia dentro del papel.

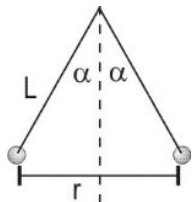
Estudiamos la situación de equilibrio de uno de los conductores, para el otro es igual. Las fuerzas aplicadas son las que aparecen en el diagrama. Aplicando la primera ley de Newton, en equilibrio $\Sigma \vec{F} = 0$

La fuerza gravitatoria por unidad de longitud $f_g = \rho g$, siendo ρ la densidad lineal de masa, en kg/m

La tensión también está considerada “por cada metro”, al igual que las otras dos fuerzas.



$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow \begin{cases} (x) f_m - Tx = 0 \\ (y) Ty - fg = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x) f_m - T \cdot \text{sen} \alpha = 0 \\ (y) T \cdot \text{cos} \alpha - fg = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_m = T \cdot \text{sen} \alpha \\ fg = T \cdot \text{cos} \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi \cdot r} = T \cdot \text{sen} \alpha \\ \rho g = T \cdot \text{cos} \alpha \end{cases}$$



Despejando T e igualando: $\frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi \cdot r} = \rho g \cdot \text{tg} \alpha$

Vemos en el dibujo que $r = 2 L \cdot \text{sen} \alpha$

Así $\frac{\mu_0 \cdot I^2}{4\pi \cdot L \cdot \text{sen} \alpha} = \rho g \cdot \text{tg} \alpha$

$$I^2 = \frac{4\pi \cdot L \cdot \rho \cdot g \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{tg} \alpha}{\mu_0}$$

Sustituyendo los valores ($L = 0,04 \text{ m}$, $\rho = 0,05 \text{ kg/m}$, $g = 9,8 \text{ N/kg}$, $\alpha = 12^\circ/2 = 6^\circ$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ TmA}^{-1}$)

$$I = \sqrt{\frac{4\pi \cdot L \cdot \rho \cdot g \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{tg} \alpha}{\mu_0}} = 46,404 \text{ A}$$