

TEMA 1: MEDICIONES E INCERTIDUMBRES

INCERTIDUMBRE Y ERRORES (1/2)

Incertidumbres: “Todo conocimiento científico es incierto [...]. Si ya has tomado una decisión, puede que no resuelvas el problema. Cuando el científico te dice que no sabe la respuesta, es un hombre ignorante. Cuando te dice que tiene un presentimiento acerca de cómo algo va a funcionar, aún no está seguro. Cuando está muy seguro de que va a funcionar y te dice ‘Estoy seguro de que esto va a funcionar’, aún tiene dudas. Y es de enorme importancia, para poder progresar, reconocer esta ignorancia y esta duda. Gracias a que tenemos la duda, nos planteamos buscar nuevas ideas en nuevas direcciones”.

Aunque los científicos se distinguen por la búsqueda de respuestas “exactas” toda medida científica contiene inevitablemente un grado de incertidumbre.

Debido a los errores de los instrumentos de medida toda medida es una **aproximación**.

La incertidumbre es el intervalo, por encima y por debajo de un valor dado, en el que cabe que se encuentren los valores de las medidas repetidas de un experimento.

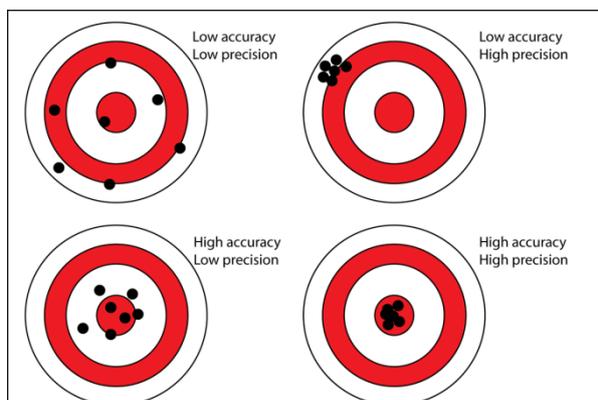
CAUSA DE ERRORES

Según su origen se pueden clasificar:

- **Naturales:** Debido a las variaciones de los fenómenos de la naturaleza como sol, viento, humedad, temperatura, etc.
- **Personales:** Debido a la falta de habilidad del observador, estos son errores involuntarios que se cometen por la falta de cuidado.
- **Instrumentales:** Debido a imperfecciones o desajustes de los instrumentos topográficos con que se realizan las medidas. Por estos errores es muy importante el hecho de revisar los instrumentos a utilizar antes de cualquier inicio de trabajo.

PRECISIÓN Y EXACTITUD

- **EXACTITUD.** Grado de aproximación a la verdad o grado de perfección a la que hay que procurar llegar. Se denomina exactitud a la capacidad del instrumento de acercarse a la magnitud física real. Las medidas son exactas si el error sistemático es pequeño.
- **PRECISIÓN.** Es un indicador de la correspondencia entre un número de mediciones hechas del mismo modo indicado por el error absoluto. Las medidas son precisas si el error aleatorio es pequeño.



CLASES DE ERRORES

De entre los errores más comunes podemos distinguir dos grandes grupos:

- **Errores sistemáticos.** Se producen cuando algo funciona mal de forma repetida, ya sea el instrumento de medida o en el método empleado. Las causas más frecuentes de estos errores son instrumentos que tienen una escala incorrecta (**mal calibrada**), o instrumentos que tienen un valor inicial incorrecto, como por ejemplo un medidor que muestra una pantalla un determinado valor cuando la lectura debería ser cero. Este error se denomina error de calibración de cero. Cualquier elemento de cristalería empleado para medidas cualitativas es una fuente potencial de error

Incertidumbre y errores

potencial de error sistemático. Así mismo la lectura sistemática de un tubo graduado desde una posición del ojo demasiado elevada o demasiada baja introduce otro error sistemático (**error de paralaje**).

Cuando se utiliza un equipamiento más sofisticado, por ejemplo aparatos de medida electrónicos, los errores sistemáticos pueden aparecer como resultado de un nivel bajo de batería, un mal contacto eléctrico en el interior del dispositivo, sensibilidad a la temperatura y a la humedad, e incluso defectos mecánicos en el caso de movimiento del aparato de medida.

- **Errores aleatorios o accidentales.** Dependen del azar o de causas que no podemos controlar. Se deben a variaciones en el uso de instrumentos o en quien toma las medidas (observador), estos se dan indiferentemente en un sentido o en otro y por tanto puede ser que tengan signo positivo o negativo. Su existencia se debe a múltiples razones, entre las que se encuentran:

- Limitaciones en la escala o la pantalla que esté utilizando.
- Lecturas en la escala desde posiciones incorrectas.
- Irregularidades en los tiempos de reacción de la persona que manipula un cronómetro.
- Dificultad para realizar observaciones que cambian rápidamente con el tiempo.

La lectura obtenida a partir de un instrumento de medida está limitada por la menor división de su escala. Es lo que se denomina error de **legibilidad (o de lectura)**. Por ejemplo, un termómetro de vidrio líquido en su interior, con una escala en la que solo vienen marcados los grados no es fiable para medir intervalos de 0,1°C. Normalmente se considera que el error asociado a una escala analógica (continua), es la mitad de la división más pequeña. En el caso de instrumentos digitales se considera que el error corresponde a la menor división que puede mostrar los instrumentos digitales.

INCERTIDUMBRE ABSOLUTA PARA UNA SOLA MEDIDA CON INSTRUMENTO ANALÓGICO:

$$\text{ERROR ABSOLUTO } (\pm\Delta X) = \text{Mínima escala}/2$$

INCERTIDUMBRE ABSOLUTA PARA UNA SOLA MEDIDA CON INSTRUMENTO DIGITAL:

$$\text{ERROR ABSOLUTO } (\pm\Delta X) = \text{Menor dígito de su escala}$$

Los errores aleatorios no se pueden evitar pero se pueden disminuir o procesar aplicando la “teoría de errores”, para intentar reducir el efecto de este tipo de errores se suele medir varias veces en las mismas condiciones y se considera como valor final más probable la **media aritmética** de los datos obtenidos.

Muchos experimentos implican la realización de un intervalo de medidas, cada una bajo unas condiciones experimentales distintas, de forma que se pueda representar una gráfica que muestre el patrón de los resultados. Si aumentamos el número de pares de medidas reducimos también los efectos de los errores aleatorios porque la recta de ajuste puede de ajuste puede dibujarse con mayor fiabilidad.

Los experimentos deben diseñarse, dentro de lo posible para que se produzcan lecturas grandes, ya que cuando más grande sea una medida, menor será su error asociado. Si esto no es posible, puede que sea necesario sustituir el instrumento de medida por otro con divisiones más pequeñas.

Los errores sistemáticos no se reducen repitiendo las medidas. Los instrumentos deben revisarse antes de ser utilizados para detectar posibles errores, pero puede ocurrir que no detectemos un error sistemático hasta que hayamos representado gráficamente los resultados y veamos que la recta de ajuste no interseca en el eje vertical de la forma esperada. En un caso así lo más conveniente es aumentar o disminuir todas las medidas en la misma magnitud si es que se puede determinar la causa del error sistemático.

Dado que todas las medidas están afectadas por un error experimental, en el mundo científico es común hacer constar cada resultado obtenido en una medición junto con la incertidumbre sobre esa medida. La incertidumbre es un valor numérico que se obtiene por medio de dos nuevos conceptos denominados error absoluto y error relativo.

Una práctica bien realizada es aquella que tiene bien calculadas las incertidumbres y en la que se han cometido pocos errores aleatorios o sistemáticos en las medidas o se han sabido reducir sus efectos.

Incertidumbre y errores

LA MEDIDA OBTENIDA SE REPRESENTA ASÍ:

Magnitud = valor \pm incertidumbre unidad

La última cifra significativa de una medida debería ocupar el mismo lugar que la incertidumbre. Por ejemplo, 1226,21 \pm 200 mA es incorrecto, pero 1200 \pm 200 mA es correcto. Como la incertidumbre se expresa en el lugar de las centenas también expresamos la respuesta hasta el lugar de las centenas. Fíjate que la incertidumbre determina el número de cifras significativas de la respuesta.

CÁLCULO DE INCERTIDUMBRES

La manera de calcular las incertidumbres depende del tipo de medida. Distinguiremos:

- **MEDIDAS DIRECTAS:** Las que se obtienen comparando la magnitud con el patrón directamente o mediante un aparato calibrado. Así se suelen medir la longitud, la masa, el tiempo ...
- **MEDIDAS INDIRECTAS:** Las que se calculan mediante una fórmula a partir de magnitudes medidas directamente. Así suelen obtenerse la velocidad, el volumen, ...

El que una medida sea directa o indirecta no depende de la magnitud en sí, sino del experimento que empleamos para determinarla. Lo que en un experimento se mide de manera directa, en otro puede determinarse de manera indirecta.

CÁLCULO DE INCERTIDUMBRES EN MEDIDAS DIRECTAS

MEDIA O PROMEDIO ARITMÉTICO

La media aritmética de un conjunto finito de números, se obtiene a partir de la suma de todos sus valores dividida entre el número de sumandos.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$$

ERROR ABSOLUTO (ΔX)

El error absoluto de una medida (ΔX) es la diferencia entre el valor real de la medida y el valor que se ha obtenido en la medición (X_i). Muchas veces utilizaremos como aproximación al valor real o verdadero, la media (\bar{x}) de los valores que tenemos

$$\Delta X = \bar{x} - X_i$$

El error absoluto puede ser un valor positivo o negativo, según si la medida es superior al valor real o inferior y además tiene las mismas unidades que las de la medida.

Tenemos que:

$$X = \bar{x} \pm \Delta X$$

Para calcular el error absoluto de una medida es imprescindible conocer en primer lugar qué valor se considera como real, es decir la media:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$$

y después de calcular el error absoluto de cada una de las medidas obtenidas:

$$\Delta X = \bar{x} - X_i$$

N

Calcularemos lo que se denomina la **imprecisión absoluta o desviación media:**

Incertidumbre y errores

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{|x_i - \bar{x}|}{N}$$

La imprecisión absoluta se puede considerar como el error absoluto del conjunto de medidas que hemos realizado. Más concretamente la imprecisión absoluta (ΔX) es la media de los errores absolutos tomados con signos positivos.

LA INCERTIDUMBRE EN LA MEDIA

La incertidumbre en la media es **más o menos** la mitad de entre el valor máximo y el valor mínimo:

$$\Delta \bar{X} = \frac{X_{\text{máx}} - X_{\text{mín}}}{2}$$

Y se representa así:

$$\bar{X} \pm \Delta \bar{X}$$

¿Para qué sirve el error absoluto?

El error absoluto es un indicador de la imprecisión que tiene una determinada media. De hecho, cuando se proporciona el resultado de una medida suele venir acompañada de dicha imprecisión.

ERROR RELATIVO (δx)

Es el cociente entre el error absoluto y el valor que consideramos como exacto (la media). Al igual que el error absoluto puede ser positivo o negativo porque puede producirse por exceso o por defecto y al contrario que él no viene acompañado de unidades.

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

PORCENTAJE ($\epsilon\%$)

De igual forma, se puede multiplicar el error relativo por 100 obteniéndose así el tanto por ciento (%) de error.

$$\text{error porcentual } x = \delta x \cdot 100$$

¿Para qué sirve el error relativo?

El error relativo tiene la misión de servir de indicador de la calidad de una medida. Para entender este concepto utilizaremos otro ejemplo. Imagina que se comete un error absoluto de 1 metro al medir una finca de 500 metros y otra de 6000. Si calculamos los errores relativos en ambas mediciones tenemos que son $1/500$ y $1/6000$. Dado que en la segunda medición el error relativo es más pequeño quiere decir que la calidad de la medida es mucho mejor que la de la primera. De hecho si lo piensas, bien es mucho mejor equivocarse en un metro cuando cuento 6000 metros que cuando cuento 500 metros.

Cuando se realizan una medición se considera que su calidad es mucho mayor cuanto más pequeño es el error relativo que se comete.

De forma general, el resultado de una medida se obtiene de la siguiente forma:

- Si únicamente realizamos una sola medición con el instrumento de medida, el resultado final será el valor leído \pm la precisión del instrumento de medida.
- Si realizamos N medidas en las mismas condiciones, tomaremos como valor la media aritmética (\bar{x}) \pm el **mayor** valor entre la imprecisión absoluta (o también puede ser la incertidumbre en la media) y la precisión del instrumento de medida.

4. Propagación de incertidumbres (importante para el criterio de OPD).

Cuando la magnitud que buscamos no se puede medir directamente, hay que calcularla indirectamente a partir de otras magnitudes. Ese cálculo produce que las incertidumbres se propaguen y crezcan.

a. Producto de una magnitud por una constante.

Si queremos calcular la magnitud X , igual a la magnitud Y multiplicada por una constante:

$$X = a \cdot Y$$

El error absoluto de X es el error absoluto de Y multiplicado por la constante:

$$\Delta X = a \cdot \Delta Y$$

b. Suma o resta.

Si queremos calcular la magnitud X , igual a la suma o resta de las magnitudes Y y Z :

$$X = Y + Z \quad \text{o} \quad X = Y - Z$$

El error absoluto de X es la suma de los errores absolutos de Y y de Z :

$$\Delta X = \Delta Y + \Delta Z$$

c. Producto o división.

Si queremos calcular la magnitud X , igual al producto o cociente de las magnitudes Y y Z :

$$X = Y \cdot Z \quad \text{o} \quad X = Y/Z$$

El error relativo de X es la suma de los errores relativos de Y y de Z :

$$\delta X = \delta Y + \delta Z$$

ATENCIÓN: Para expresar el resultado de X deberíamos después calcular el error absoluto de X :

$$\Delta X = X \cdot \delta X$$

d. Potencia.

Si queremos calcular la magnitud X , igual a una potencia de la magnitud Y :

$$X = Y^n$$

El error relativo de X es el error relativo de Y multiplicado por el exponente:

$$\delta X = n \cdot \delta Y$$

ATENCIÓN: Para expresar el resultado de X deberíamos después calcular el error absoluto de X :

$$\Delta X = X \cdot \delta X$$

e. Seno y coseno de una magnitud.

- Si queremos calcular la magnitud X , igual al seno o coseno del ángulo Θ :

$$X = a \cdot \text{sen } \Theta$$

o

$$X = a \cdot \text{cos } \Theta$$

$$\Delta X = a \cdot \Delta \Theta \cdot |\text{cos } \Theta|$$

$$\Delta X = a \cdot \Delta \Theta \cdot |\text{sen } \Theta|$$

ATENCIÓN: el ángulo Θ debe estar expresado en radianes.

- Si la magnitud X es igual a:

$$X = a \cdot \text{cos}^2 \Theta$$

$$\Delta X = a \cdot \Delta \Theta \cdot 2 \cdot |\text{cos } \Theta| \cdot |\text{sen } \Theta|$$

ATENCIÓN: el ángulo Θ debe estar expresado en radianes.

f. Combinación de varios casos.

Si queremos calcular la magnitud X , igual a la siguiente expresión:

$$X = a \cdot Y^n \cdot Z^m$$

o

$$X = a \cdot \frac{Y^n}{Z^m}$$

El error relativo de X es:

$$\delta X = |n| \cdot \delta Y + |m| \cdot \delta Z = |n| \cdot \frac{\Delta Y}{Y} + |m| \cdot \frac{\Delta Z}{Z}$$

ATENCIÓN: Para expresar el resultado de X deberíamos después calcular el error absoluto de X :

$$\Delta X = X \cdot \delta X$$

g. Casos desconocidos.

Como norma general, cuando queremos calcular el error absoluto de una magnitud X que es función de otras:

$$X = f(X, Y, Z)$$

El error relativo de X es:

$$\Delta X = |f(X, Y, Z) - f(X + \Delta X, Y + \Delta Y, Z + \Delta Z)|$$

Ej.: $X = \text{cos}^2 \theta$

$$\Delta X = |\text{cos}^2 \theta - \text{cos}^2(\theta + \Delta \theta)|$$

Ej.: $X = \sqrt{Y^2 + Z^2}$

$$\Delta X = |\sqrt{Y^2 + Z^2} - \sqrt{(Y + \Delta Y)^2 + (Z + \Delta Z)^2}|$$

5. Pendiente de una gráfica y su incertidumbre (importante para el criterio de OPD).

a. Recta de mejor ajuste.

La recta de mejor ajuste es aquella que está lo más cerca posible de todos los puntos a la vez.

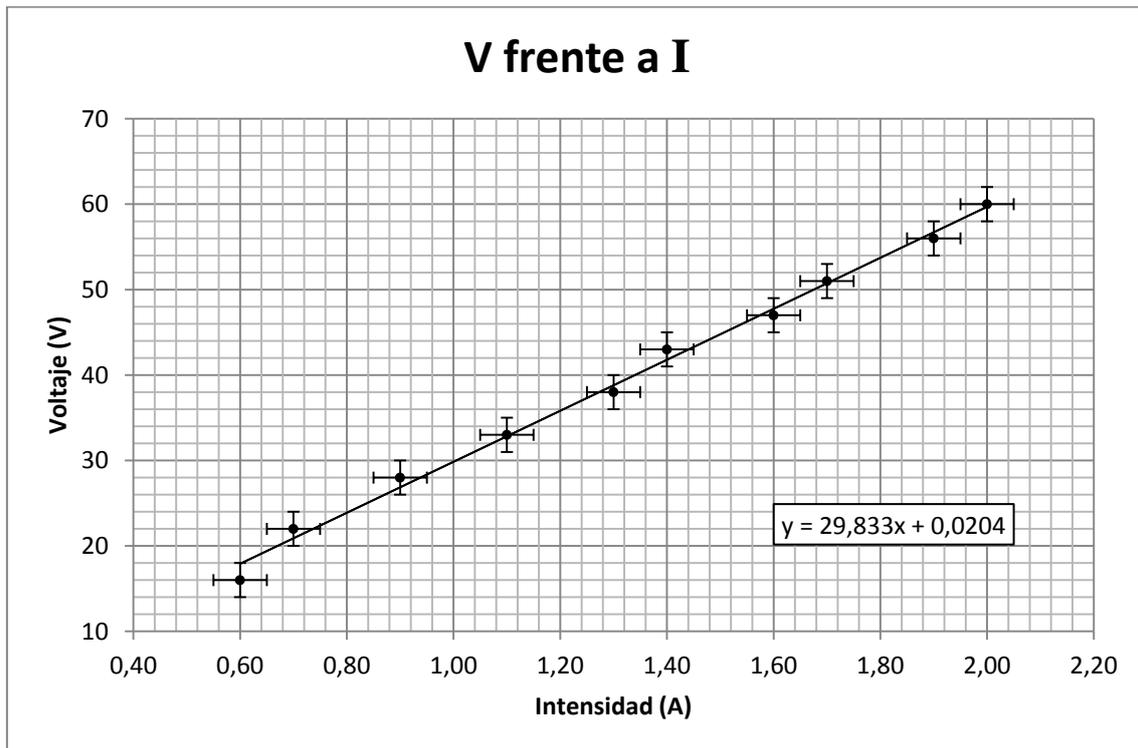
- Se puede dibujar a mano y calcular la pendiente como la tangente del ángulo que forma la recta con el eje horizontal.
- Para calcular la tangente no se deben usar puntos experimentales, sino dos puntos de la recta suficientemente separados.
- Informáticamente, la podemos calcular con Excel usando las funciones:

$m = \text{"PENDIENTE(valores_y;valores_x)"}$,

$n = \text{"INTERSECCION.EJE(valores_y;valores_x)"}$,

donde la ecuación de la recta será $y = ax + b$.

(Esta función en Excel calcula la "recta de mínimos cuadrados", que minimiza los cuadrados de las distancias de los puntos a la recta).



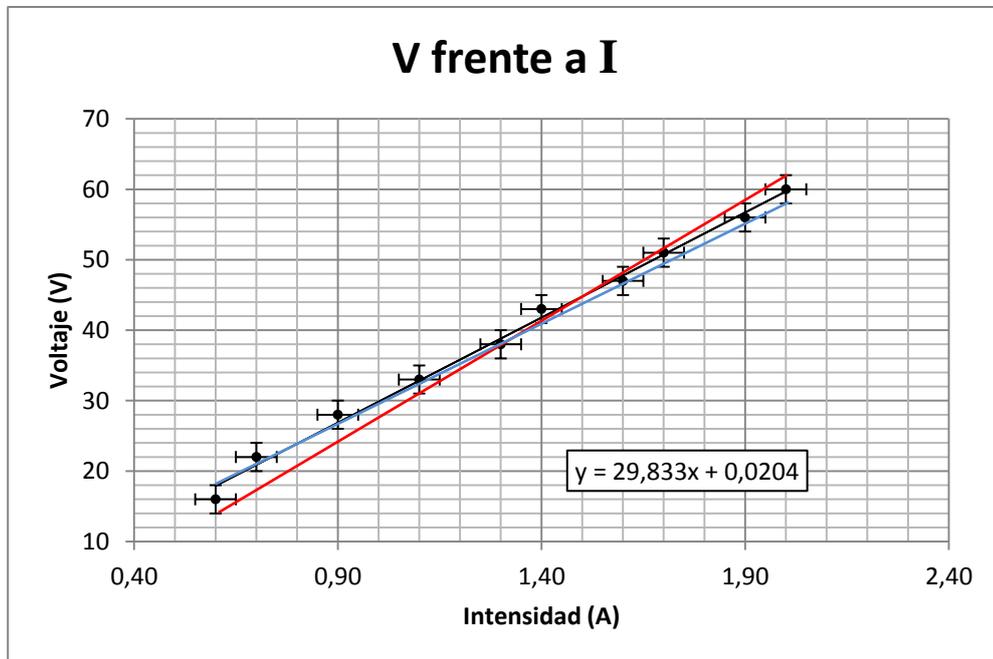
b. Incertidumbre de la pendiente.

La pendiente de la recta de mejor ajuste también tiene su incertidumbre.

- Esta incertidumbre se puede aproximar como la mitad de la diferencia entre las pendientes máxima y mínima que se pueden dibujar en la gráfica.

$$\Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2}$$

- Las rectas de **máxima** y **mínima** pendiente son las que se dibujan desde los extremos de las barras de error del primer punto al último.
- Se pueden usar las barras verticales o las horizontales.
- Se calculan usando los datos numéricos del primer y último punto sumando o restando los errores de las barras horizontales o verticales.



Ejemplo con barras verticales:

	I (A)	ΔI (A)	V (V)	ΔV (V)
1 ^{er} pto.	0,60	0,05	16	2
...
Último pto.	2,00	0,05	60	2

Ptos. máxima pendiente

I (A)	V (V)
0,60	16 - 2 = 14
2,00	60 + 2 = 62

Ptos. mínima pendiente

I (A)	V (V)
0,60	16 + 2 = 18
2,00	60 - 2 = 58

En Excel, usamos la función "PENDIENTE(valores_y;valores_x)" con la tabla de la izquierda para hallar la máxima pendiente y con la tabla de la derecha para hallar la mínima pendiente.

PROPAGACIÓN DE INCERTIDUMBRES

error absoluto de $x = \Delta x$ \longrightarrow

Si medimos la magnitud x una sola vez:

• $\Delta x =$ la precisión del aparato de medida o

• $\Delta x =$ una estimación mayor que la precisión si creemos que nuestra medida tiene una incertidumbre mayor por la forma en la que medimos.

Si medimos la magnitud x varias veces (mínimo 10):

error relativo de $x = \delta x = \frac{\Delta x}{x}$

error porcentual de $x = \delta x \cdot 100$

• $\Delta x = \sigma =$ *desviación estándar* $= \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(\bar{x} - x_i)^2}{N(N-1)}}$ o

• $\Delta x =$ la precisión del aparato, si es mayor que el cociente anterior.

MAGNITUD	ERROR RELATIVO	ERROR ABSOLUTO
$X = a \cdot Y$	-----	$\Delta X = a \cdot \Delta Y$
$X = Y + Z$ $X = Y - Z$	-----	$\Delta X = \Delta Y + \Delta Z$
$X = Y \cdot Z$ $X = Y/Z$	$\delta X = \delta Y + \delta Z$	$\Delta X = X \cdot \delta X$
$X = Y^n$	$\delta X = n \cdot \delta Y$	$\Delta X = X \cdot \delta X$
$X = a \cdot \text{sen } \Theta$	-----	$\Delta X = a \cdot \Delta \Theta \cdot \cos \Theta ^*$
$X = a \cdot \text{cos } \Theta$	-----	$\Delta X = a \cdot \Delta \Theta \cdot \text{sen } \Theta ^*$
$X = a \cdot Y^n \cdot Z^m$	$\delta X = n \cdot \delta Y + m \cdot \delta Z$	$\Delta X = X \cdot \delta X$
$X = f(X, Y, Z)$	-----	$\Delta X = f(X, Y, Z) - f(X + \Delta X, Y + \Delta Y, Z + \Delta Z) $

* En radianes.