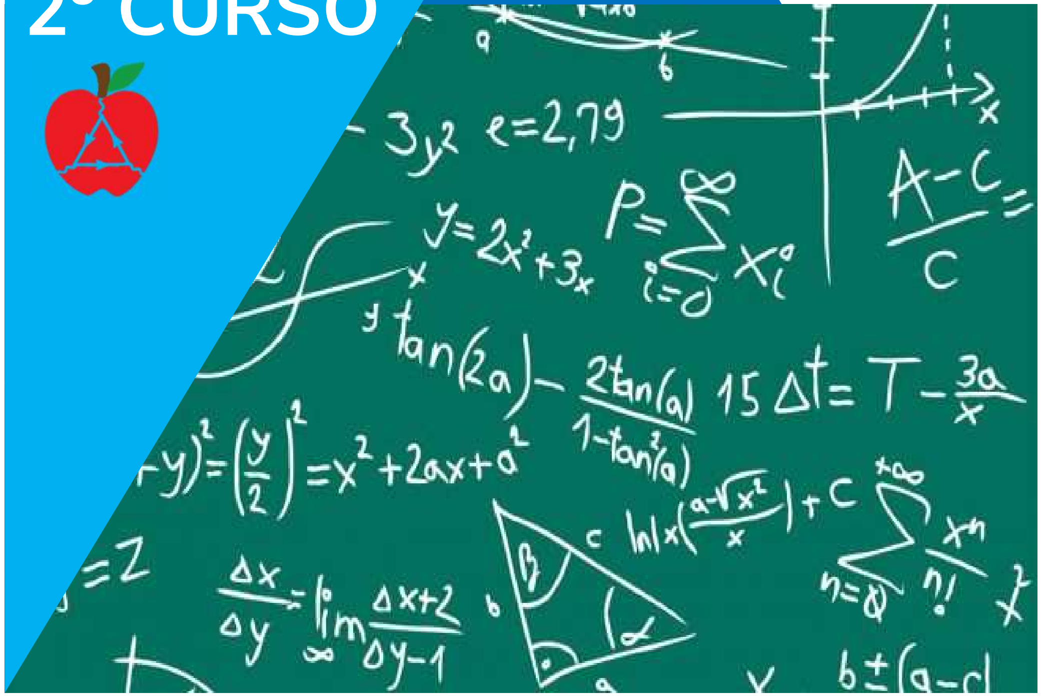
FÍSICA

2º CURSO

ANEXOS

A: HERRAMIENTAS DE LA FÍSICA



Se revisan instrumentos matemáticos que serán útiles durante el curso: cálculo vectorial, trigonometría, cálculo diferencial e integral.

Rafael Artacho Cañadas

TABLA DE CONTENIDOS

A partir del 20 de mayo de 2019, las 7 unidades básicas están basadas en 7 números exactos, algunos de los cuales son constantes físicas universales.

Constante de Planck:

$h = 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}\ kg\ m^2\ s^{-1}$

Velocidad de la luz en el vacío:

$c = 299\,792\,458\ m\ s^{-1}$

Frecuencia de la transición hiperfina del estado base del átomo de Cesio-133:

$\Delta\nu_{Cs} = 9\,192\,631\,770\ s^{-1}$

Carga elemental:

$e = 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}\ A\ s$

Constante de Boltzmann:

$k = 1{,}380\,649 \times 10^{-23}\ kg\ m^2\ K^{-1}\ s^{-2}$

Número de Avogadro:

$N_A = 6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}\ mol^{-1}$

Eficacia luminosa de la luz monocromática de la luz de $540 \times 10^{12}\ Hz$:

$K_{cd} = 683\ cd\ sr\ s^3\ kg^{-1}\ m^{-2}$

1.1. Magnitudes fundamentales y derivadas

Magnitudes y unidades fundamentales

Magnitud	Nombre	Símbolo	Definición
longitud	metro	m	Se define tomando el valor numérico fijo de la velocidad de la luz en el vacío c como 299 792 458 cuando se expresa en la unidad $m\ s^{-1}$, donde el segundo se define en términos de la frecuencia de cesio $\Delta\nu_{Cs}$.
masa	kilogramo	kg	Se define tomando el valor numérico fijo de la constante de Planck h como 6.626 070 15 x 10^{-34} cuando se expresa en la unidad *J s*, que es igual a $kg\ m^2\ s^{-1}$, donde el metro y el segundo se definen en términos de c y $\Delta\nu_{Cs}$.
tiempo	segundo	s	Se define tomando el valor numérico fijo de la frecuencia de cesio $\Delta\nu_{Cs}$, la frecuencia de transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de cesio-133, como 9 192 631 770 cuando se expresa en la unidad *Hz*, que es igual a s^{-1}.
intensidad de corriente eléctrica	amperio	A	Se define tomando el valor numérico fijo de la carga elemental e como 1,602 176 634 x 10^{-19} cuando se expresa en la unidad C, que es igual a A s, donde el segundo se define en términos de $\Delta\nu_{Cs}$.
temperatura	kelvin	K	Se define tomando el valor numérico fijo de la constante de Boltzmann *k* como 1.380 649 x 10^{-23} cuando se expresa en la unidad $J\ K^{-1}$, que es igual a $kg\ m^2\ s^{-2}\ K^{-1}$, donde el kilogramo, metro y en segundo lugar se definen en términos de *h*, c y $\Delta\nu_{Cs}$.
Intensidad luminosa	candela	cd	Se define tomando el valor numérico fijo de la eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540 x 10^{12} Hz, K_{cd}, como 683 cuando se expresa en la unidad $lm\ W^{-1}$, que es igual a *cd sr*, o $cd\ sr\ kg^{-1}\ m^{-2}\ s^3$, donde el kilogramo, metro y segundo se definen en términos de *h*, c y $\Delta\nu_{Cs}$.
cantidad de sustancia	mol	mol	Un mol contiene exactamente 6.022 140 76 x 10^{23} entidades elementales. Este número es el valor numérico fijo de la constante de Avogadro, N_A, cuando se expresa en la unidad mol^{-1} y se denomina número de Avogadro.

1.1. Magnitudes fundamentales y derivadas

Magnitudes y unidades derivadas

Unidad derivada	Magnitud	Combinación de unidades fundamentales
newton (N)	fuerza	$kg\ m\ s^{-2}$
pascal (Pa)	presión	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
hercio (Hz)	frecuencia	s^{-1}
julio (J)	energía	$kg\ m^{2}\ s^{-2}$
vatio (W)	potencia	$kg\ m^{2}\ s^{-3}$
culombio (C)	carga eléctrica	A s
voltio (V)	diferencia de potencial	$kg\ m^{2}\ s^{-3}\ A^{-1}$
ohmio (Ω)	resistencia	$kg\ m^{2}\ s^{-3}\ A^{-2}$
weber (Wb)	flujo magnético	$kg\ m^{2}\ s^{-2}\ A^{-1}$
tesla (T)	intensidad del campo magnético	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
becquerel (Bq)	radiactividad	s^{-1}

1.2. Múltiplos y submúltiplos

Múltiplos

Factor	Prefijo	Símbolo
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da

Submúltiplos

Factor	Prefijo	Símbolo
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

El **análisis dimensional** es una parte de la física que estudia la **forma como se relacionan las magnitudes fundamentales con las derivadas.**

Ecuación dimensional es aquella igualdad matemática que sirve para relacionar las magnitudes derivadas en función de las fundamentales.

$$[A] = L^a M^b T^c I^d \theta^e I_V{}^f N^g$$

Principio de homogeneidad: Una ecuación será homogénea, si es dimensionalmente correcta. Por lo tanto, todos sus términos serán iguales.

Siendo: A = B + C + D;
Si la fórmula es correcta, entonces se cumple que:

[A] = [B] = [C] = [D]

Los ángulos, las funciones trigonométricas, las funciones logarítmicas y en general cualquier número son **adimensionales**; es decir la ecuación dimensional de todos ellos es igual a la unidad.

Ejemplos

- $\left[\acute{A}rea\right] = [Longitud]^2 = L^2$
- $[Volumen] = \left[\acute{A}rea \times Altura\right] = L^3$
- $[Densidad] = \left[\frac{Masa}{Volumen}\right] = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}$
- $[Velocidad] = \left[\frac{Distancia}{Tiempo}\right] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$
- $[Aceleración] = \left[\frac{Velocidad}{Tiempo}\right] = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$
- $[Fuerza] = [Masa \times Aceleración] = M \times LT^{-2} = MLT^{-2}$
- $[Trabajo] = [Fuerza \times Distancia] = MLT^{-2} \times L = ML^2T^{-2}$
- $[Potencia] = \left[\frac{Trabajo}{Tiempo}\right] = \frac{ML^2T^{-2}}{T} = ML^2T^{-3}$

Ejercicio resuelto 1

Un grupo de alumnos quiere estudiar los **factores que influyen en el periodo de oscilación** de un péndulo simple. Los alumnos suponen que el periodo depende de la longitud del hilo (l), de la masa del cuerpo que oscila (m) y del valor de la gravedad (g). Utiliza el cálculo dimensional para estimar si las variables mencionadas son correctas, y establece el tipo de relación de las mismas con el periodo.

1. La relación general entre las variables indicadas y del periodo es: $T = constante \cdot l^a\, m^b\, g^c$
2. La fórmula dimensional de las magnitudes implicadas:

$$[T] = T;\ [l] = L;\ [m] = M;\ [g] = LT^{-2}$$

3. Establecer la condición de homogeneidad:

$$[T] = [constante \cdot l^a\, m^b\, g^c] \rightarrow T = L^a\, M^b\, (LT^{-2})^c \rightarrow T = L^{a+c}\, M^b\, T^{-2c}$$

4. Desarrollar la condición de homogeneidad dimensional. Debe verificarse:

$$0 = a + c; 0 = b; 1 = -2c$$

Resolviendo, podemos establecer el valor de los exponentes: $a = 1/2\,; b = 0; c = -1/2$

Por lo tanto, podemos establecer la relación:

$$T = constante\sqrt{\frac{l}{g}}$$

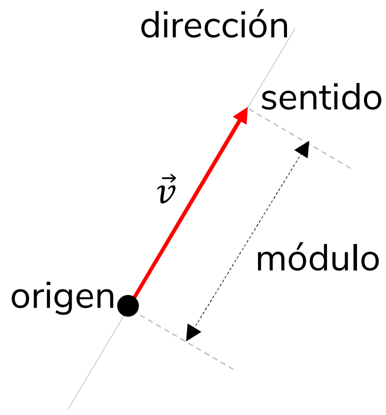
ACTIVIDADES

1. Verifica la corrección dimensional de las siguientes fórmulas:
   a) $a = v^2/r$
   b) $s = vt + {}^{1}/_{2}\, at^2$
   c) $v = 2as$
   d) $Ft = p$

2. La frecuencia de vibración (f) de una masa colgada de un muelle tiene una dimensión de T^{-1}. Experimentalmente se ha comprobado que dicha frecuencia de vibración depende de la masa del cuerpo colgado m, ($[m] = M$) y de la constante recuperadora elástica del muelle k, ($[k] = MT^{-2}$). Establece, usando el cálculo dimensional, el posible tipo de relación existente entre dichas variables.

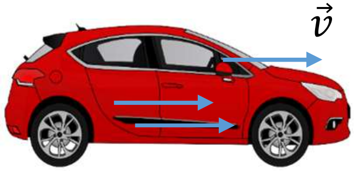
3.1. Definición de vector. Clasificación

Una **magnitud escalar** es aquella que queda completamente determinada con un número y sus correspondientes unidades, y una **magnitud vectorial** es aquella que, además de un valor numérico y sus unidades (**módulo**) debemos especificar su **dirección** y **sentido**



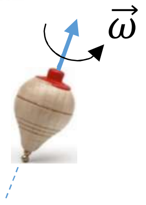
Clasificación

- **Vectores libres**: Se pueden trasladar paralelamente a sí mismos



- **Vectores fijos**: Su origen, dirección y sentido son fijos e inmutables

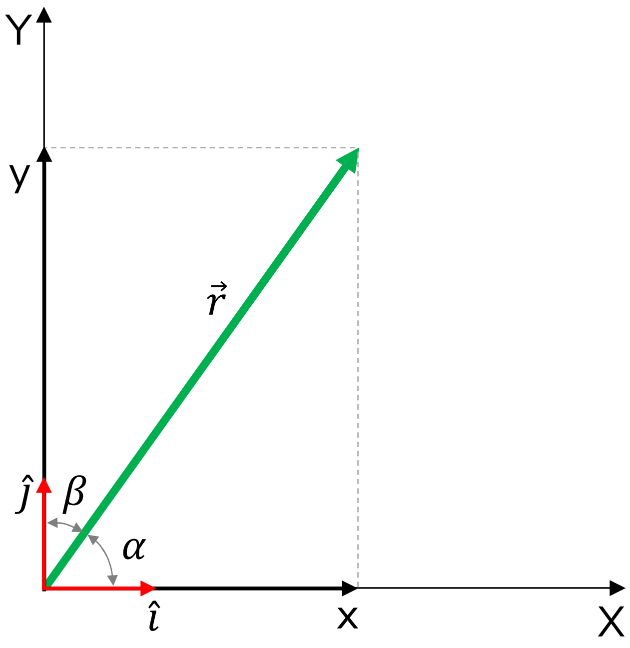
- **Vectores deslizantes**: Se pueden desplazar sobre su recta dirección



3.2. Expresión matemática de un vector

Todo vector puede expresarse analíticamente usando la notación: $\vec{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ o en función de los vectores unitarios: $\vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{k}}$.

En el plano



El vector viene dado por $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$

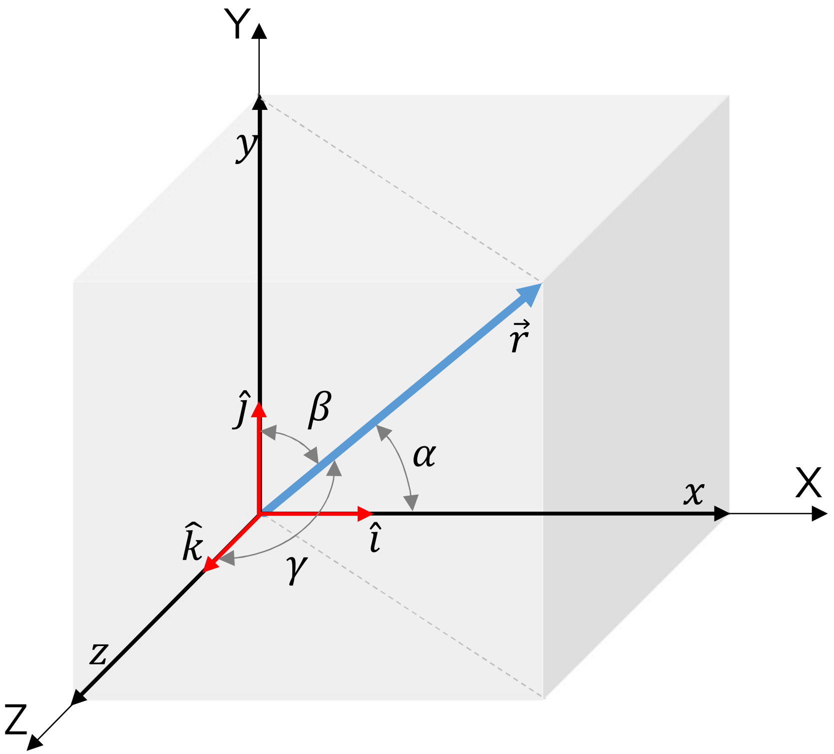
El módulo viene dado por $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

La dirección del vector viene indicada por los **cosenos directores**

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|}; \qquad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|}$$

3.2. Expresión matemática de un vector

En el espacio



El vector viene dado por $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

El módulo viene dado por $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

La dirección del vector viene indicada por los **cosenos directores**

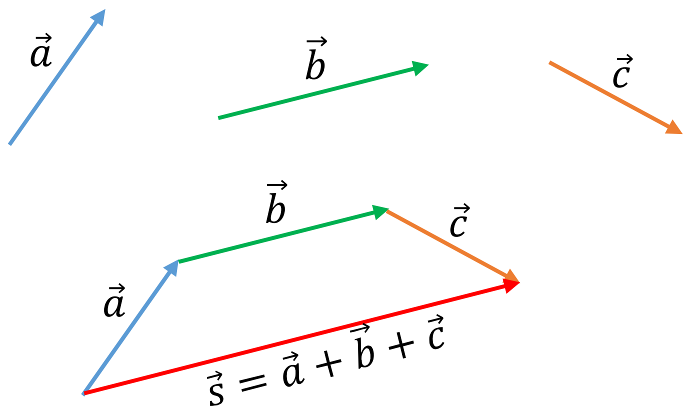
$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|}; \qquad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|}; \qquad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}$$

3.3. Suma y diferencia de vectores. Producto por un escalar

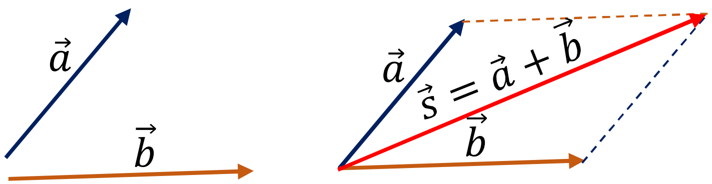
Suma de vectores

Procedimiento Gráfico

Es otro vector que resulta de unir el origen del primero con el extremo del último.



Regla del paralelogramo



Procedimiento Analítico

Consiste en ir sumando miembro a miembro las mismas componentes cartesianas.

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$
$$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$
$$\vec{c} = c_x\hat{\imath} + c_y\hat{\jmath} + c_z\hat{k}$$

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{s} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) + (c_x, c_y, c_z)$$

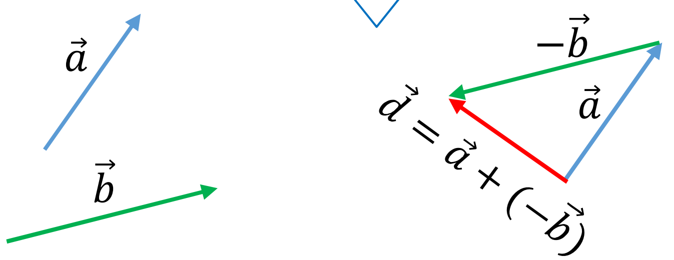
$$\boxed{\boldsymbol{\vec{s} = (a_x + b_x + c_x, a_y + b_y + c_y, a_z + b_z + c_z)}}$$

3.3. Suma y diferencia de vectores. Producto por un escalar

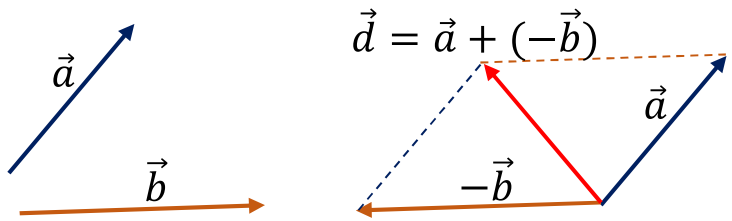
Diferencia de vectores

Procedimiento Gráfico

Es un vector que resulta de unir el origen del primero con el extremo del opuesto del segundo.



Regla del paralelogramo



Procedimiento Analítico

Consiste en ir sumando miembro a miembro las mismas componentes cartesianas.

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$
$$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\vec{s} = (a_x, a_y, a_z) + (-b_x, -b_y, -b_z)$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{s}} = (\boldsymbol{a_x} - \boldsymbol{b_x}, \boldsymbol{a_y} - \boldsymbol{b_y}, \boldsymbol{a_z} - \boldsymbol{b_z})}$$

3.3. Suma y diferencia de vectores. Producto por un escalar

Producto por un escalar

Al multiplicar un número por un vector obtenemos otro **vector de igual dirección**, el **sentido** será el mismo si el número es positivo, y opuesto en caso de que sea negativo. El **módulo** será el que resulte de multiplicar el del vector por el número.

$$2 \times \vec{a} = 2\vec{a} \qquad\qquad -3 \times \vec{a} = -3\vec{a}$$

Procedimiento Analítico

Al multiplicar un número real, *k*, por un vector

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\right) = \left(ka_x\hat{\imath} + ka_y\hat{\jmath} + ka_z\hat{k}\right)$$

El módulo del nuevo vector vendrá dado por

$$|k\vec{a}| = \sqrt{(ka_x)^2 + \left(ka_y\right)^2 + (ka_z)^2}$$

$$|k\vec{a}| = k\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = k|\vec{a}|$$

Ejercicio resuelto 2

Sean los vectores $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$; $\vec{b} = 5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$. Calcular: a) El módulo de cada uno de ellos; b) El ángulo que forma $\vec{b}$ con el eje X; c) $\vec{a} + \vec{b}$; d) $\vec{a} - 2\vec{b}$; e) Un vector unitario en la dirección de $\vec{a}$; f) Un vector opuesto a $\vec{b}$ y módulo 2.

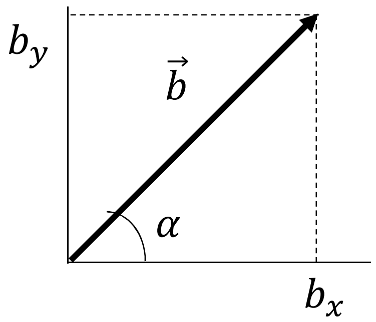
a) Los módulos de los dos vectores vienen dados por:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \mathbf{3,74}$$

$$|\vec{b}| = b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{5^2 + 5^2 + 0^2} = \mathbf{7,07}$$

b) Para determinar el ángulo que forma el vector $\vec{b}$ con el eje X:

$$\cos\beta = \frac{b_x}{|\vec{b}|} = \frac{5}{7{,}07} = 0{,}707 \;\rightarrow\; \beta = 45^0$$



c) La suma de los dos vectores viene dada por:

$$\vec{a} + \vec{b} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k} + 5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} = \mathbf{8\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} - \hat{k}}$$

d) Para resolver este apartado solo tenemos que multiplicar el vector $\vec{b}$ por -2 y sumar el vector $-\vec{a}$:

$$\vec{a}-2\vec{b}=3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k}-2(5\hat{\imath}+5\hat{\jmath})=3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k}-10\hat{\imath}-10\hat{\jmath}=\boldsymbol{-7\hat{\imath}-8\hat{\jmath}-\hat{k}}$$

e) El vector unitario se obtiene dividiendo el vector entre su módulo:

$$\hat{u}_{\vec{a}}=\frac{\vec{a}}{a}=\frac{\boldsymbol{3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k}}}{\boldsymbol{3,74}}$$

f) Se halla el vector unitario en la dirección de $\vec{b}$ y luego lo multiplicamos por -2:

$$\hat{u}_{\vec{b}}=\frac{\vec{b}}{b}=\frac{5\hat{\imath}+5\hat{\jmath}}{7{,}07};\ -2\hat{u}_{\vec{b}}=\frac{\boldsymbol{-10\hat{\imath}-10\hat{\jmath}}}{\boldsymbol{7,07}}$$

ACTIVIDADES

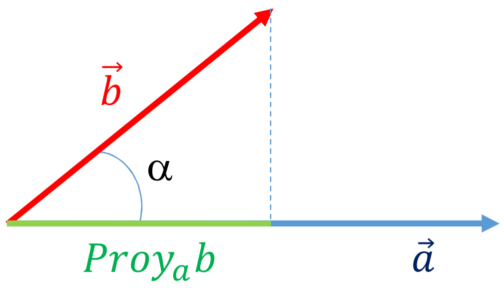
3. A partir de los vectores $\vec{a} = (1, 0, 3)$; $\vec{b} = (3,-2, 0)$ y $\vec{c} = (-1, 2,-2)$, efectúa las operaciones que se indican: i) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; ii) $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$; iii) $-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$.
   Sol: i) (3, 0, 1); ii) (10,–10, 9); iii) (–6, 6,–7)

4. Dadas tres fuerzas concurrentes, cuyos valores son $F_1 = 40$ N, $F_2 = 50$ N y $F_3 = 25$ N, que forman 30°, 120° y –180° respectivamente con el eje X, calcula: i) La fuerza resultante de sumar las tres; ii) El módulo de la resultante y el ángulo que forma con X.
   Sol: i) $\vec{F} = -15{,}5\hat{\imath} + 63{,}3\hat{\jmath}$ (N); ii) F = 65,1 N; 103,7°

3.4. Producto escalar de dos vectores

El resultado de multiplicar **escalarmente** dos vectores es el **número** que se obtiene multiplicando sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\, cos\alpha = a \cdot Proy_a b$$



Propiedades

- Sí $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (el producto escalar es conmutativo).
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$.
- $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$.
- $\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$.

Procedimiento analítico

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} \qquad \vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) = \boldsymbol{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}}$$

Ejercicio resuelto 3

Sean los vectores $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$; $\vec{b} = 5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$, Calcular: a) El producto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$; b) La proyección de $\vec{a}$ en la dirección de $\vec{b}$; c) El ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$; d) Un vector en el plano XY perpendicular a $\vec{b}$ y de módulo 2.

a) El producto escalar de los dos vectores viene dado por:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 3\cdot 5 + 2\cdot 5 + (-1)\cdot 0 = \mathbf{25}$$

b) Para determinar la proyección:

$$Proy_b a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b} = \frac{25}{\sqrt{5^2+5^5}} = \mathbf{3,53}$$

c) El ángulo se determina usando la expresión del producto escalar:

$$\alpha = arc\cos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{25}{3{,}74\cdot 7{,}07} = \mathbf{19^0}$$

d) Para calcular un vector $\vec{c}$ perpendicular a $\vec{b}$ escribimos $\vec{c}$ en componentes e imponemos la condición de que el producto escalar de ambos sea nulo:

$$\vec{c} = c_x\hat{\imath} + c_y\hat{\jmath};\vec{b}\cdot\vec{c} = b_x c_x + b_y c_y = 5c_x + 5c_y = 0;\quad c_x = -c_y$$

Cómo el módulo debe ser 2:

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = 2;\;\; c_x^2 + c_y^2 = 2c_x^2 = 4;\quad c_x = \sqrt{2};\;\; c_y = -\sqrt{2} \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{\vec{c} = \sqrt{2}\hat{\imath} - \sqrt{2}\hat{\jmath}}$$

ACTIVIDADES

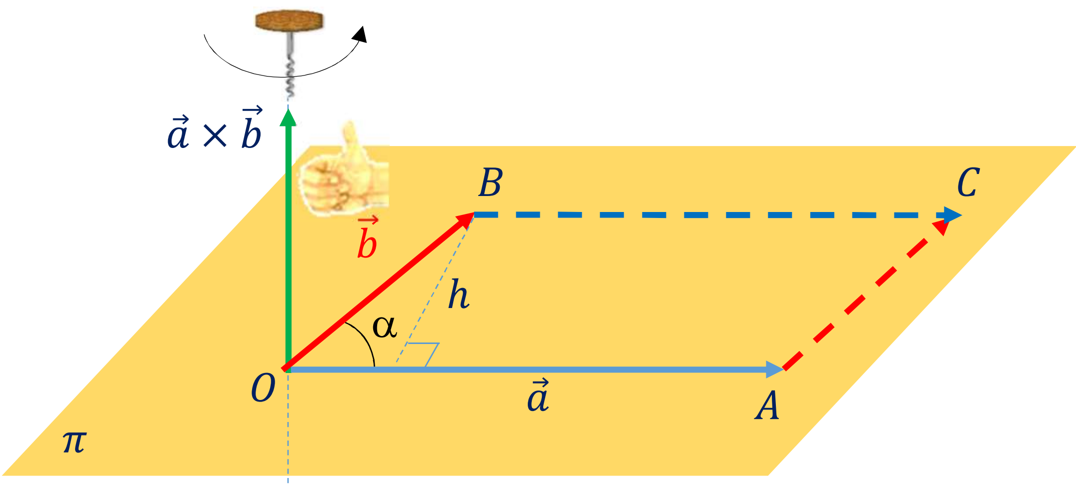
5. Dados los vectores $\vec{a} = (2, -2, 1)$ y $\vec{b} = (-1, -1, 0)$, halla: i) El ángulo que forman entre sí; ii) La proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.
   Sol: i) 90^0; ii) 0

6. Calcula el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = \left(2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}\right)\ N$ al desplazar su punto de aplicación desde el punto A (1, 4, 0) hasta el punto B (3, – 2, 1).
   Sol: $-4\ J$

3.5. Producto vectorial de dos vectores

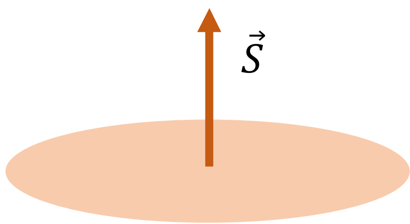
El resultado de multiplicar **vectorialmente** dos vectores ($\vec{a} \times \vec{b}$ o $\vec{a} \wedge \vec{b}$) es un **nuevo vector** cuyos atributos son:

- **Módulo**: $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\ sen\alpha$
- **Dirección**: Perpendicular al plano que forman los dos vectores
- **Sentido**: Que resulta con el avance de un sacacorchos que girase de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ por el ángulo más pequeño.



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\ sen\alpha = ah = Área\ (OACB)$$

Cualquier superficie puede representarse mediante un vector, $\vec{S}$, perpendicular a ella y cuyo módulo sea igual al área de la misma.



Propiedades del producto vectorial

- Sí $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos. Por tanto, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (el producto vectorial es anticonmutativo).
- $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$.
- $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = \hat{k};\ \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{\imath} = -\hat{\jmath};\ \hat{\jmath} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{\jmath} = \hat{\imath}$

A partir de las coordenadas cartesianas, se puede hacer el producto:

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}; \qquad \vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \times \left(b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}\right) =$$
$$\boldsymbol{\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\jmath} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{k}}$$

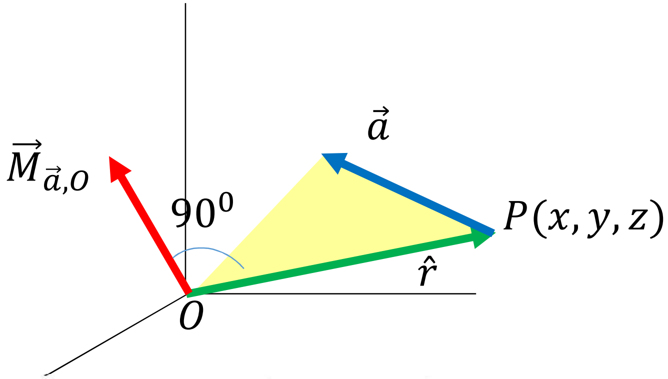
Que suele escribirse como:

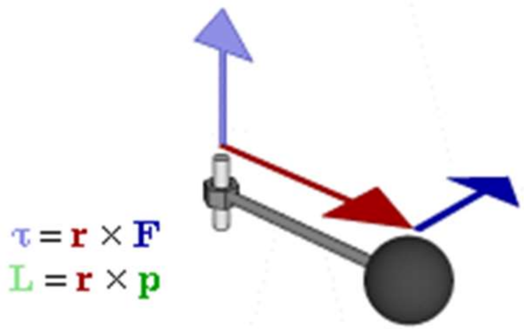
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

Momento de un vector respecto de un punto

Se define el **momento de un vector $\vec{a}$** aplicado a P, con respecto un punto O, como el producto vectorial entre el vector de posición, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, y el propio vector $\vec{a}$:

$$\vec{M}_{\vec{a},O} = \vec{r} \times \vec{a}$$





Ejemplos:

- El momento angular, $\vec{L}$, de una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$, que se define como $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$.

- El momento de una fuerza $\vec{F}$ aplicada a un punto P respecto a un punto O que se define como $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Ejercicio resuelto 4

Sean los vectores $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$; $\vec{b} = 5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$, Calcular: a) El producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$; b) El área del paralelogramo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$; c) El valor de las componentes y y z del del vector $\vec{c} = 2\hat{\imath} + c_y\hat{\jmath} + c_z\hat{k}$ para que sea paralelo a $\vec{b}$.

a) El producto vectorial de los dos vectores viene dado por:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{5\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 5\hat{k}}$$

b) El área del paralelogramo viene dada por el módulo del producto vectorial:

$$A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 5^2} = 8{,}66$$

c) Para que los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ sean paralelos, el producto vectorial debe ser nulo:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 5 & 5 & 0 \\ 2 & c_y & c_z \end{vmatrix} = 5c_z\hat{\imath} - 5c_z\hat{\jmath} + \left(5c_y - 10\right)\hat{k} = \vec{0}$$

Comparando componentes, se obtiene:

$5c_z = 0; \quad c_z = 0$

$5c_y - 10 = 0; \; c_y = 2$

Por tanto el vector $\vec{c}$ es: $\boldsymbol{\vec{c} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}}$

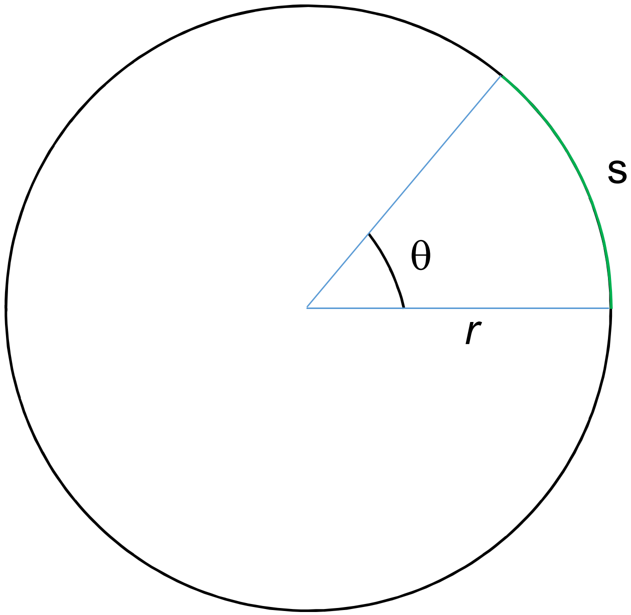
ACTIVIDADES

5. Sean los puntos A (2, 1, - 3), B (-2, -1, -2) y C (0, 3, -1): Calcular: i) El área del triángulo que forman los tres puntos; ii) El ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$; iii) El momento del vector $\overrightarrow{AB}$, respecto del origen de coordenadas.
   Sol: i) 7,35; ii) $67{,}78^0$; iii) $\vec{M} = -5\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$.

6. El punto de aplicación de la fuerza $\vec{F} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ es el punto P (3, 0, 2). Calcula el momento de la fuerza: i) Respecto al origen; ii) Respecto al punto Q (1, 1, 1).
   Sol: i) $\vec{M}_O = 6\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} - 9\hat{k}\ (N\ m)$; ii) $\vec{M}_Q = -\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 4\hat{k}\ (N\ m)$.

4.1. Medida de ángulos

- **Grado sexagesimal**. Resulta de dividirla circunferencia en 3600 y es la unidad que se utiliza en la vida cotidiana.
- **Radian**. Se define como el ángulo que limita un arco igual al radio de la circunferencia. Es la unidad del SI. Su símbolo es **rad**.



$$\theta = \frac{s}{r}\ (ángulo\ en\ radianes)$$

Si θ es menor de 25º:

$$\theta \cong sen\ \theta \cong tg\ \theta$$

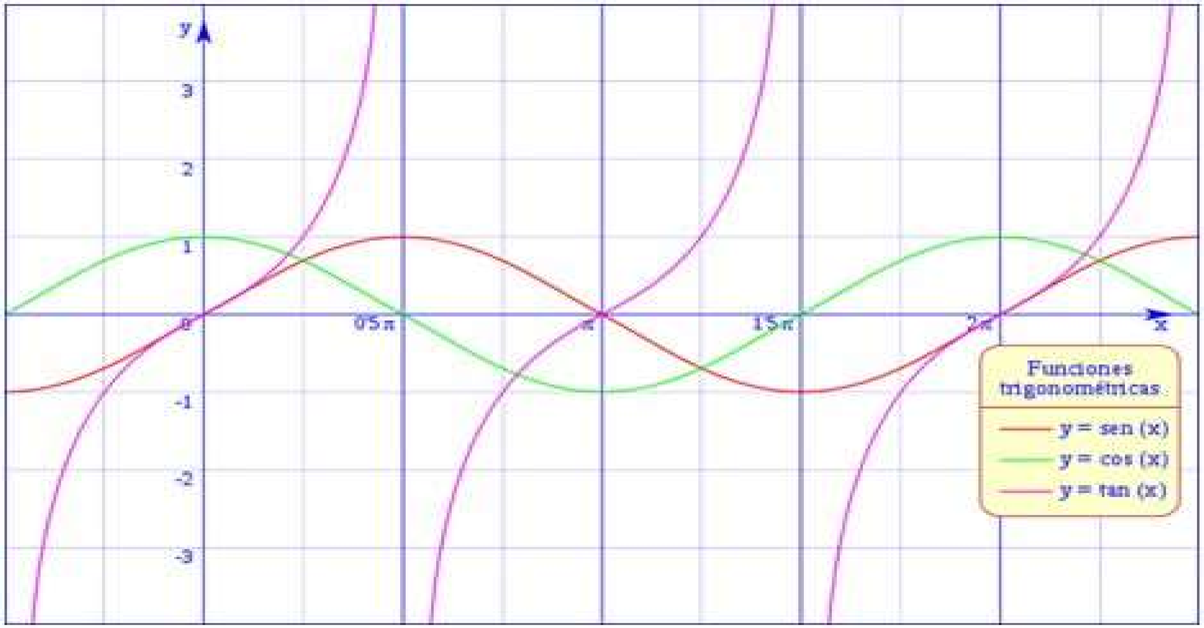
Los valores del seno y la tangente de un ángulo pequeño coinciden con el del ángulo expresado en radianes

4.2. Funciones trigonométricas

$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad cosc\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} \qquad sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ contiguo}$$

$$tg\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} \qquad cotg\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$

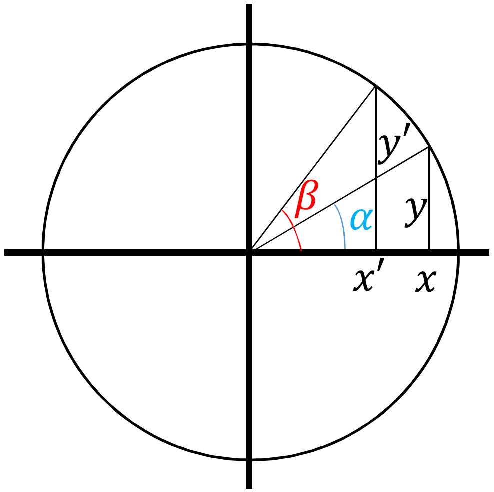


4.3. Algunas relaciones trigonométricas

$sen(a \pm b) = sena\ cosb \pm senb\ cosa$
$cos(a \pm b) = cosa\ cosb \mp sena\ senb$
$sena + senb = 2sen\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$sena - senb = 2sen\left(\frac{a-b}{2}\right)cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$cosa + cosb = 2cos\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$cosa - cosb = 2sen\left(\frac{a+b}{2}\right)sen\left(\frac{b-a}{2}\right)$

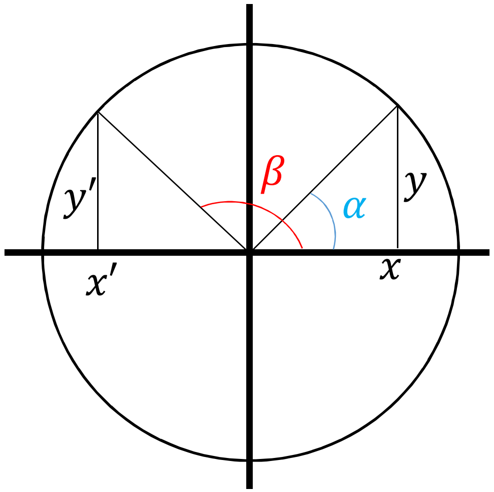
Razones trigonométricas de ángulos complementarios y suplementarios

Ángulos complementarios



$$sen\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$$
$$cos\alpha = \text{sen}(90^0 - \alpha)$$
$$tg\alpha = \text{cotg}(90^0 - \alpha)$$

Ángulos suplementarios



$$sen\alpha = \text{sen}\,(180^0 - \alpha)$$
$$cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$$
$$tg\alpha = -\text{tg}(180^0 - \alpha)$$

Ejercicio resuelto 5

Halla la suma y la resta de las funciones siguientes:

$$y_1 = 2sen(10\pi x + \pi t); y_2 = 2sen(10\pi x - \pi t)$$

La suma de las dos funciones se obtiene con la relación:

$$sena + senb = 2sen\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2} = 4[sen(10\pi x - \pi t) + sen(10\pi x + \pi t)] = \boldsymbol{4\, sen(10\pi x)cos(\pi t)}$$

La diferencia de las dos funciones se obtiene con la relación:

$$sena - senb = 2sen\left(\frac{a-b}{2}\right)cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2} = 4[sen(10\pi x - \pi t) - sen(10\pi x + \pi t)] = \boldsymbol{4\, sen(\pi t)cos(10\pi x)}$$

INICIO

ACTIVIDADES

7. Halla la suma y la resta de las funciones siguientes:

$$y_1 = 5 \cdot 10^{-2}\, cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad y_2 = 5 \cdot 10^{-2}\, cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sol: $y_1 + y_2 = 0$; $y_1 - y_2 = 0{,}1\; sen 100\pi t$

8. Dos ondas vienen descritas por las siguientes funciones:

$$y_1 = 0{,}3\; sen(200\pi t - 0{,}5x_1) \qquad y_2 = 0{,}3\; sen(200\pi t - 0{,}5x_2)$$

Las ondas concurren en un punto, el cuál experimenta una vibración que es suma de las funciones dadas. Hala la función que describe la vibración de ese punto.

Sol: $y = 0{,}6\; sen\left(200\pi t - 0{,}5\frac{x_1+x_2}{2}\right)\; cos 0{,}5\frac{x_2-x_1}{2}$

3.1 Definición de derivada Propiedades

Sea **y** una función de **x**, $y = y(x)$ definida en un cierto intervalo. Si la variable x experimenta un incremento Δx, la función y experimentará otro incremento Δy, de modo que:

- Al valor de x le corresponde $y = f(x)$.
- Al valor de $x + \Delta x$ le corresponde $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, es decir, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
- La relación entre el incremento de la función y el incremento de la variable es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

La derivada y' de la función y respecto a la variable x es el límite cuando $\Delta x \to 0$ de la razón $\Delta y / \Delta x$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se representa como y', $f'(x)$ o como $\frac{dy}{dx}$

Propiedades de las derivadas

- La derivada de una constante es cero:

$$\frac{da}{dt} = 0$$

- La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas:

$$y = f(x) + g(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = f'(x) + g'(x)$$

- La derivada de un producto escalar de funciones es:

$$y = f(x) \cdot g(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- La derivada de un producto vectorial de funciones es:

$$y = f(x) \times g(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

- La derivada de un cociente de funciones es:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

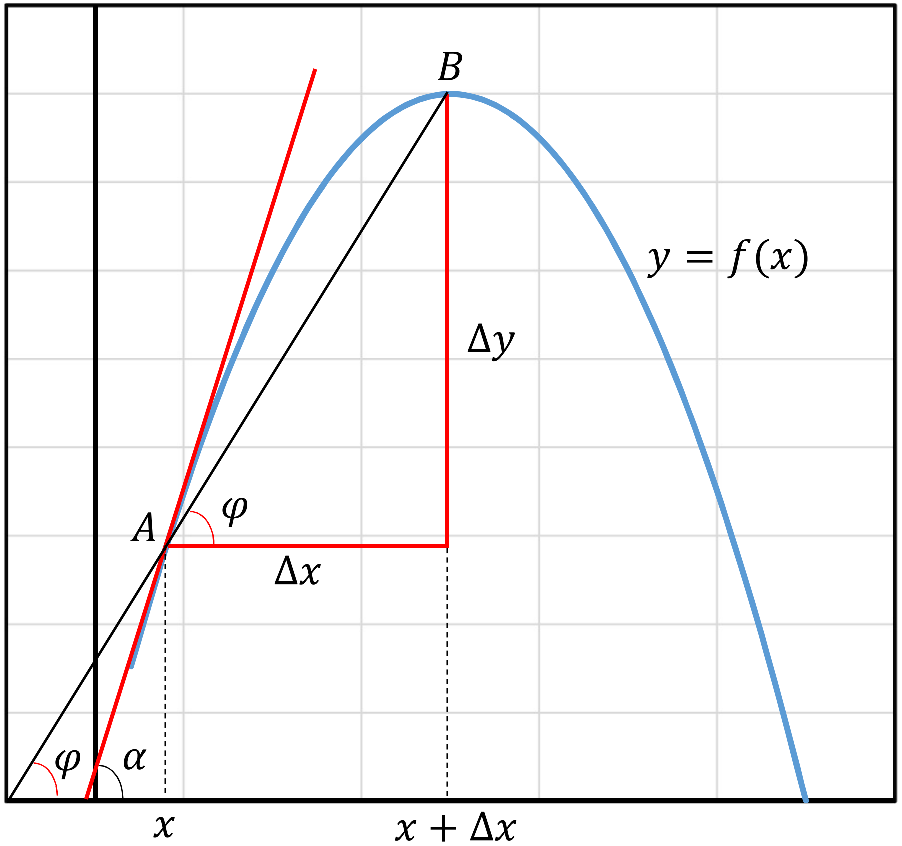
- Si y es una función de x y, a su vez, x es función de t, entonces:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Tablas de derivadas

Función	Derivada
$y = k\ (constante)$	$y' = 0$
$y = f(x)^n$	$y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = lnf(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y = senf(x)$	$y' = f'(x) \cdot cosf(x)$
$y = cosf(x)$	$y' = -f'(x) \cdot senf(x)$
$y = tgf(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{cos^2 f(x)}$
$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

5.2 Interpretación geométrica de las derivadas



Sea la función $y = f(x)$.

A cada valor de x le corresponde un valor de la función $y = f(x)$:

$$A: x \rightarrow y = f(x)$$

$$B: x + \Delta x \rightarrow y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

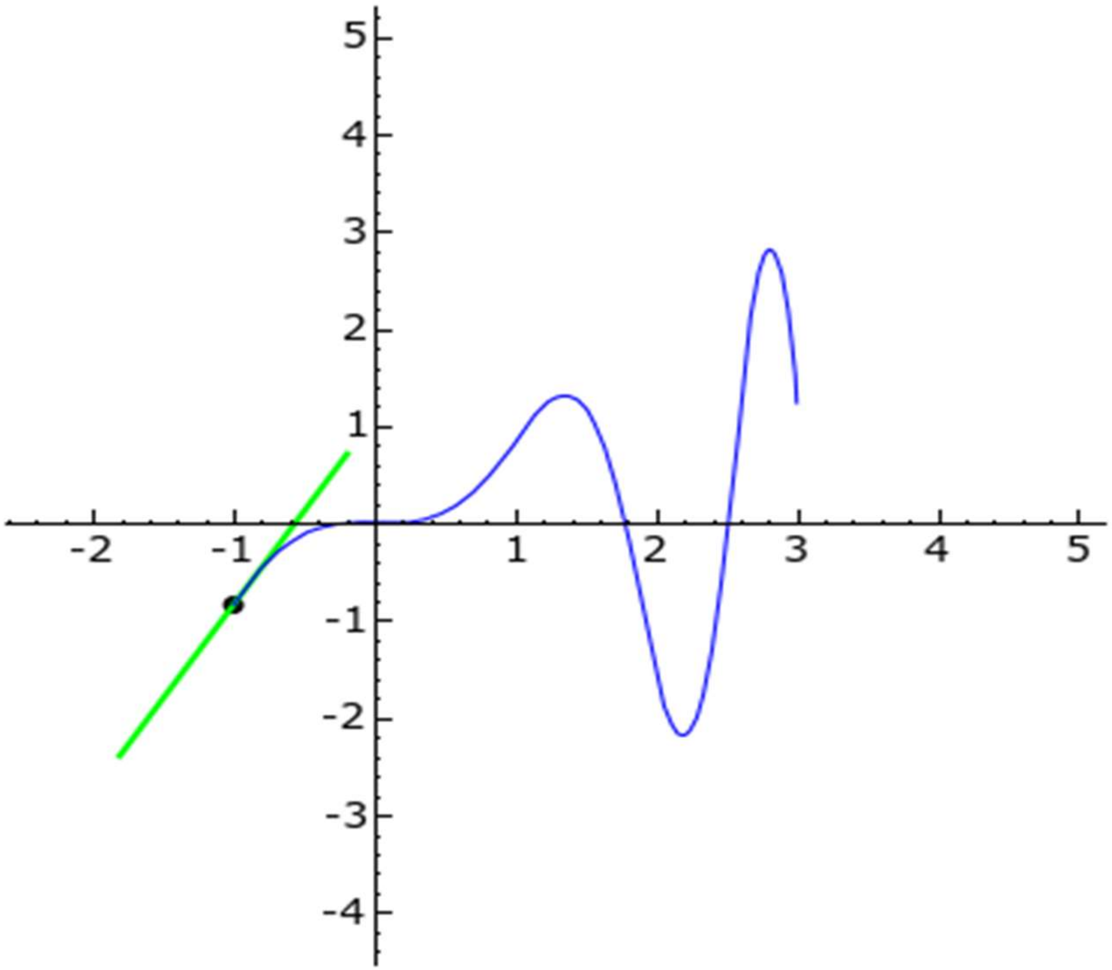
El ángulo que forma la secante AB con el eje X, cumple:

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, en el límite, la secante se convierte en tangente a la curva en A, entonces:

$$y' = tg\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

5.2 Interpretación geométrica de las derivadas



5.3. Derivada parcial

Sea una función $f(x,y,z)$, derivar parcialmente con respecto a una sola de las variables consiste en derivar la función suponiendo que las otras variables son constantes. Esta operación se simboliza con la letra ∂ (derivada parcial).

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$$

Vector gradiente de una función escalar

Si *V*(x,y,*z*) es una función escalar, se define el gradiente como:

$$\overrightarrow{grad}V(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

El vector gradiente es conocido también como el operador nabla, ∇:

$$\vec{\nabla}V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)V$$

Ejercicio resuelto 6

Calcula las derivadas parciales de la siguiente función escalar:

$$f(x,y,z) = 2xy^2 - 5y^3z^2$$

Las derivadas parciales vienen dadas por:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2y^2$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 4xy - 15y^2z^2$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = -10y^3z$$

ACTIVIDADES

9. Calcula el gradiente de la función escalar $V(x,y,z) = 6x^2yz^3 + 3yz^2 - 4zx^3y^2$ y determina su valor en el punto $(1,0,1)$.
   Sol: $9\hat{\jmath}$

6.1. Función primitiva

Se denomina **función primitiva $\boldsymbol{F(x)}$** de una función $f(x)$ a una función cuya derivada sea igual a $f(x)$:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- La función primitiva no es única, cualquier función el tipo $F(x) + C$ también es primitiva de $f(x)$.
- El conjunto formado por todas las primitivas de una función recibe el nombre de integral indefinida.

Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, la expresión $F(x) + C$ se llama **integral indefinida de la función $\boldsymbol{f(x)}$** y se designa mediante el símbolo:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

6.2. Propiedades de las integrales

- La integral indefinida de la diferencial de una función es:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

- Cualquier constante puede sacarse fuera del signo de integración:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

- La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Tabla de integrales
$\int dx = x + C$
$\int kdx = kx + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int senxdx = -cosx + C$
$\int cosxdx = senx + C$
$\int e^x\, dx = e^x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = lnx + C$

Ejercicio resuelto 7

Calcula la integral indefinida siguiente:

$$\int \left(-3x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+1} - cosx\right) dx$$

La integral de una suma es la suma de las integrales:

$$\int \left(-3x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+1} - cosx\right) dx = \int -3x^2 dx + \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx - \int cosxdx$$

$$= -3\frac{x^3}{3} + C_1 + 2\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C_2 + \ln(x+1) + C_3 + senx + C_4 =$$

$$-x^3 - \frac{2}{x} + \ln(x+1) + senx + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = \boldsymbol{-x^3 - \frac{2}{x} + ln(x+1) - senx + C}$$

ACTIVIDADES

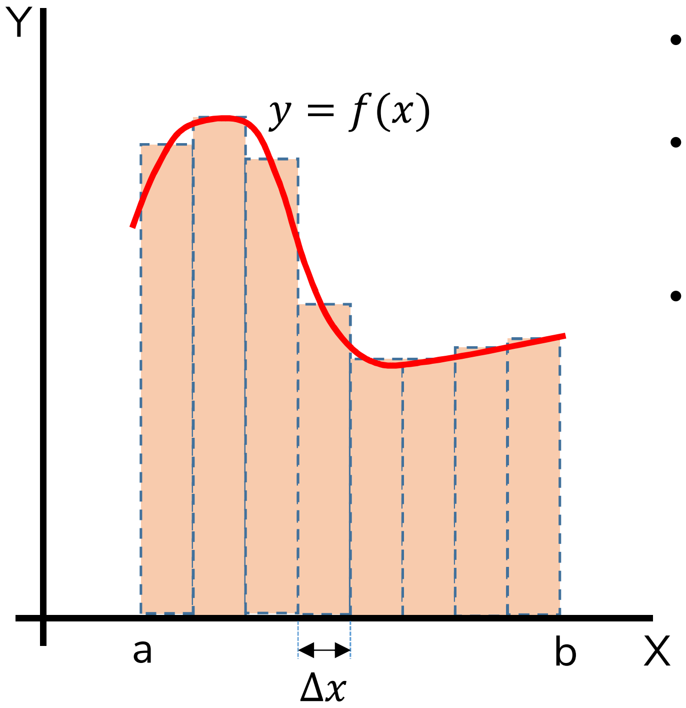
10. Calcula la integral indefinida siguiente:

$$I = \int (3x^2 - 2senx + 4\sqrt{x})dx$$

Sol: $I = x^3 + 2cosx + \frac{8\sqrt{x^3}}{3} + C$

11. Un cuerpo se mueve a lo largo del eje X con una velocidad en función del tiempo $v = 12t$, en unidades del SI. Obtener la expresión de la posición para cualquier instante de tiempo, teniendo en cuenta que en $t = 2\ s$, el cuerpo está en $x = 30\ m$.
Sol: $x = 6t^2 + 6$

6.3. La integral definida. Regla de Barrow



- La integral definida se interpreta como el área limitada por una curva y el eje de abscisas.
- Para calcularla se podría dividir el área en rectángulos, de tal forma que la suma de todos ellos daría una primera aproximación del área real.
- Dicha aproximación sería tanto mejor, cuanto más pequeña fuese la base de los rectángulos y sería perfecta cuando $\Delta x \to 0$. Esta suma se expresa mediante la siguiente notación:

$$Área = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f_i(x)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Regla de Barrow. Si $f(x)$ es una función continua y positiva en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, el área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$ es el valor de $F(b) - F(a)$.

$$Área = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ejercicio resuelto 8

Calcula la integral definida siguiente:

$$\int_{-2}^{2} -\frac{4}{x^2}\,dx$$

La integral viene dada por:

$$\int_{-2}^{+2} -\frac{4}{x^2}\,dx = -4\left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{2} = -4\left[-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{-2}\right)\right] = -4(-1) = \mathbf{4}$$

ACTIVIDADES

12. La velocidad de un móvil con movimiento rectilíneo viene dada por $v(t) = 8t - 2$. Calcula el desplazamiento Δx realizado por el móvil entre $t_1 = 0$ y $t_2 = 4\,s$, sabiendo que se calcula con la expresión:

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

Sol: 56 m

13. Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int_1^3 3\,x^2 dx$ b) $\int_0^{\pi} 4\,sen\theta d\theta$ c) $\int_2^4 \frac{3}{x} dx$

Sol: a) 26; b) 8; c) 2,079

Información de Contacto

Rafael Artacho Cañadas

Granada

artacho1955@gmail.com